

Теорема Фубини о перестановке интегрирования (без док-ва)

$\exists X, Y$ — 2 пр-ва: $A \subset X, B \subset Y, A \times B = D$

Лемма $\exists K_x, K_y$ — кольца. Тогда $K_x \times K_y = K_z$ — полукольцо ($Z = X \times Y$)

▲ $D_1 = A_1 \times B_1, D_2 = A_2 \times B_2 \quad (A_i \in K_x, B_i \in K_y)$

1) $D_1 D_2 = (A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = (A_1 A_2) \times (B_1 B_2)$ (Легко проверить)

2) Пусть $D_2 \supset D_1, D_2 \setminus D_1 = (A_2 \times B_2) \setminus (A_1 \times B_1) = (A_2 \setminus A_1) \times B_2$

$\sqcup [(B_2 \setminus B_1) \times A_1]$. (Это действительно так!)

Введем меру $\mu_z(D) = \mu_x(A) \cdot \mu_y(B)$

▼ If μ_x, μ_y — σ -адд. на K_x и K_y , то μ_z — σ -адд. на K_z и K_z

▲ $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i; D_i \in K_x \times K_y$. Если g -то, то $\mu(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(D_i)$.

Введем сечения $D_x = \{y \in Y, (x, y) \in D, x \text{ — фикс. } y\}$.

$D_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{ix} \Rightarrow \mu_y(D_x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_y(D_{ix})$. Отметим, что

$\int_X \sum_{i=1}^n \mu_y(D_{ix}) d\mu_x$ ограничен: $\bigcup_{i=1}^n D_{ix} \subset D_x; \mu_y(\bigcup_{i=1}^n D_{ix}) =$

$= \sum_{i=1}^n \mu_y(D_{ix}) \leq \mu_y(D_x); \int_X \sum_{i=1}^n \mu_y(D_{ix}) d\mu_x; \sum \mu_z(D_i) \leq$

$\mu_z(D)$. Итак, $\sum_{i=1}^n \int_X \mu_y(D_{ix}) d\mu_x \leq \mu_z(D)$. Из сума-адд.

и т. далее, $\int_X \sum_{i=1}^{\infty} \mu_y(D_{ix}) d\mu_x = \sum_{i=1}^{\infty} \int_X \mu_y(D_{ix}) d\mu_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu_z(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_z(D_i)$. ЧТД. ■

Обозначим $\mu_x \otimes \mu_y = \mu_z$

Лемма $\exists K$ — кольцо эл-тов, μ задана на K и μ удовлетворяет по лев. $\exists C \subset X, C$ — изм. по левому; тогда $\exists A \supset C: \mu(C) = \mu(A)$, где $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \subset A_{n+1}, A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ni}, B_{ni} \in K, B_{ni} \cap B_{mj} = \emptyset, B_{ni} \in K$

$$m^*(C) = \inf_{\text{покрытия}} \sum_{i=1}^{\infty} m(B_i). \exists \tilde{B}_n \in \mathcal{K}: C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_n, \sum_{i=1}^{\infty} m(\tilde{B}_n) \leq m(C) + \frac{1}{n}.$$
 Поэтому $\tilde{A}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_n$. Ясно, что $C \subset \tilde{A}_n$, $m(\tilde{A}_n) \leq m(C) + \frac{1}{n}$. Поэтому $A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$. Покажем, что $A_n \supset A_{n+1}$; обозначим $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$; $C \subset A$, $m(C) \leq m(A)$.
 Но $A \subset A_n \subset \tilde{A}_n \forall n \Rightarrow m(C) \leq m(\tilde{A}_n) \leq m(C) + \frac{1}{n}$.
 $m(C) \leq m(A) \leq m(\tilde{A}_n) \leq m(C) + \frac{1}{n}$. Значит $m(C) = m(A)$.
 Осталось доказать, что $A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_{ki}$.
 Пусть $B_{ij} = \bigcup_{i=1}^j B_{in}$. Тогда $B_{ij} \in \mathcal{K}$, $\tilde{A}_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{in}$.
 $\bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} B_{ij} = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{jn} = \tilde{A}_n$.
 $\bigcup_{m=1}^{\infty} B_{mn} = \tilde{A}_n$, $B_{mn} \subset B_{m+1,n}$, $B_{mn} \in \mathcal{K}$ Ч.Т.Д.

$C \subset X \times Y$ — измер. относительно $\mu_x \otimes \mu_y$; тогда g почти $\forall$ $x \in X$ измерим относительно μ_y , $\mu_y(C_x)$ — интерпр. по μ_x , $\mu_x \otimes \mu_y(C) = \int_X \mu_y(C_x) d\mu_x$

Пусть $A \subset C$; $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{in}$; $A_{i+1} \subset A_i$, $B_i \subset B_{i+1}$

1) Пусть $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, $B_i \in \mathcal{K}$. $D_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ix}$, $B_{ix} \subset B_{i+1,x}$. Тогда каждое сечение B_{ix} изм. амн. μ_y ; $D_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{ix}$ — тоже изм. $\forall x$ амн. μ_y . Поэтому $\mu_y(D_x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_y(B_{ix})$.
 Отметим, что $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, B_i — изм. амн. $\mu_x \otimes \mu_y$, $B_i \subset B_{i+1}$

и, в силу перем. $\mu_x \otimes \mu_y$, $\mu_x \otimes \mu_y(D) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_x \otimes \mu_y(B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_X \mu_y(B_{ix}) d\mu_x$. По т. Лебег, $\mu_x \otimes \mu_y(D) = \int_X \mu_y(D_x) d\mu_x$

2) $A_n: A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_n σ -алгебра. A_x изм. амн. $\mu_y \forall x \Rightarrow \mu_x \otimes \mu_y(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x$; σ -бо аналогично

3) Пусть $\mu_x \otimes \mu_y(C) = 0$. Тогда $\exists A: C \subset A$, $\mu_x \otimes \mu_y(A) = 0$, $\mu_x \otimes \mu_y(C) = 0$, и A_x — изм. $\forall x$ амн. μ_y , $\mu_x \otimes \mu_y(A) = \int_X \mu_y(A_x) d\mu_x$. Значит, $\mu_y(A_x) \stackrel{a.e.}{=} 0 \Rightarrow \mu_y(C_x) \stackrel{a.e.}{=} 0$.
 $\int_X \mu_y(C_x) d\mu_x = 0 \Rightarrow 0 = \mu_x \otimes \mu_y(C) = \int_X \mu_y(C_x) d\mu_x$

4) С-измеримо, $\mu_x \otimes \mu_y(C) > 0 \Rightarrow \exists A \supset C: \mu_x \otimes \mu_y(A) = \mu_x \otimes \mu_y(C)$; $A = C \bigcup_{E \in \mathcal{E}} (A \setminus C) = C \cup E$, $\mu_x \otimes \mu_y(E) = 0$.
 Р-измеримо $A_x = C_x \bigcup E_x \Rightarrow A_x$ измер. $\forall x$, E_x п.б.х;
 C_x измер. для п.б.х X ; $\mu_y(C_x) \stackrel{\text{p.б.х}}{=} \mu_y(A_x) \Rightarrow \mu_x \otimes \mu_y(C) = \mu_x \otimes \mu_y(A) \stackrel{\text{p.б.х}}{=} \int_X \mu_x(A_x) d\mu_y = \int_X \mu_y(C_x) d\mu_x \Rightarrow$
 $\mu_x \otimes \mu_y(C) = \int_X \mu_y(C_x) d\mu_x$. Ч.Т.Д. ■

Сл $\int f \geq 0$ - инт. на X , $\int C = \int h(x, t): 0 \leq t \leq f(x), x \in X$ (криволинейная трапеция). Тогда $\mu_x \otimes \mu_t(C) = \int_X f(x) d\mu_x$.

V (Фубини)

• $\int f(x, y)$ интер. по $\mu_x \otimes \mu_y$ на $X \times Y$. Тогда г/н почти всех x $f(x, y)$ интер. по μ_y , $\int_Y f(x, y) d\mu_y$ - интер. по x , и $\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu_x \otimes \mu_y = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\mu_y \right] d\mu_x = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\mu_x \right] d\mu_y$

• If $f(x, y) \geq 0$, и $\exists \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_y d\mu_x$, то $f(x, y)$ интер. по $\mu_x \otimes \mu_y$, и повтор. ф-ны равны

▲ Без док-ва ■